第三章、數值方法與蒙地卡羅模擬：

決定性數值方法

韓傳祥

清華大學 計量財務金融學系

數值偏微分方程：有限差分法

- 評價在 Black-Scholes 模型下一個歐式選擇權的價格，其形式如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t}(t,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) + rx\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) - rP(t,x) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times (0,\infty) \\ \\ P(T,x) = h(x) \end{cases}$$

自然對數 log 轉換

- 定義P$(t,x) = u\big(t, log(x)\big)$，則 u$(t,x)$ 滿足了以下的偏微分方程式
- $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - ru(t,x) = 0, on\ [0,T] \times (-\infty,\infty) \\ u(T,x) = g(x) \equiv h(e^x) \end{cases}$$
- 透過 log 轉換的最大好處是保持了一個非退化的擴散係數 $\sigma^2/2$，以維持(具漂移項)布朗運動之無窮小生成元 (infinitesimal generator) 的橢圓性質。

定義域局部化 (localization)

- null Dirichlet boundary condition
- $\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \tilde{A}u(t,x) = 0 \;\; on\ [0,T] \times O_x \\ u(t,xmin) = u(t,xmax) = 0 \;\; if\ t \in [0,T] \\ u(T,x) = g(x)\ if\ x \in O_x \end{cases}$
- 其中狀態空間 $O_x = [xmin, xmax]$。微分算子 $\tilde{A}$ 定義為

$$\tilde{A}u = \frac{\sigma(x)^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial u}{\partial x} - ru$$

時間與空間的離散化

- $b(x_i)\frac{\partial u(t_n,x_i)}{\partial x} = b(x_i)\frac{\nabla u_i^n}{2h} + \mathrm{O}(h^2)$
- $\sigma^2(x_i)\frac{\partial^2 u(t_n,x_i)}{\partial x^2} = \sigma^2(x_i)\frac{\Delta u_i^n}{h^2} + \mathrm{O}(h^2),$
- $\nabla u_i^n = u_{i+1}^n - u_{i-1}^n$
- $\Delta u_i^n = u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n$
- $\frac{\partial u(t_n,x_i)}{\partial x} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + \mathrm{O}(k)$
- $h = \frac{xmax - amin}{I}, k = \frac{T}{N}$

Crank-Nicolson算法

- $$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ \beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r \\ \gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right). \end{cases}$$

- $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \beta+\alpha & \gamma & 0 & \cdots & & & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & & \cdots & & 0 & \alpha & \beta+\gamma \end{bmatrix}$$

解一個向量型式的方程組

- $\left(\frac{1}{k}I_d - \theta A\right)u^n = \left(\frac{1}{k}I_d + (1-\theta)A\right)u^{n+1}$
- $u^N = \left(g(x_i)\right)_{i=0}^{I}$

傅立葉轉換方法 (Fourier Transform Method) 評價選擇權

- 令 $C_T(k)$ 為一歐式買權
- $log(S_T)$ 的傅立葉轉換記為 $\phi_T(u) = E[exp(iu \log S_T)]$
- 乘上一“阻尼參數”(Damping Parameter) 定義出當 $\alpha > 0$，

$$c_T(k) = exp(\alpha k) C_T(k)$$

- 令傅立葉轉換記為

$$\psi_T(v) = \int_R e^{ivk} c_T(k) dk$$

- 取反傅立葉轉換得到

$$\mathrm{C}_T(k) = e^{-\alpha k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(v) e^{ivk} dv = e^{-\alpha k} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Real\left(\psi_T(v) e^{ivk}\right) dv$$

快速傅立葉轉換 (fast Fourier transform, FFT)

- 可將原來的計算量 $O(N^2)$ 降至 $O(N \log N)$ ，因此提升了計算選擇權價格的效率性。快速傅立葉轉換是工程上常使用的積分技巧，在許多的計算軟體中都有現成的指令可以直接使用

幾個常見的隨機模形

- **跳躍-擴散 (Jump-Diffusion)** 模型：

$$\phi_T(u) = \exp\left[T\left(-\frac{\sigma^2 u^2}{2}\right) + i\mu^M u + \lambda(\exp(-\frac{\delta^2 u^2}{2} + i\mu u - 1))\right]$$

- **VG (Variance Gamma)** 模型：

$$\phi_T(u) = \exp(\log(S_0 + (r+\omega)T)(1 - i\theta v u + \frac{\sigma^2 u^2 v}{2}))^{-T/v}$$ 。

- **隨機波動 (Stochastic Volatility)** 模型：

$$\phi_T(u) = \frac{exp\left(\frac{\kappa\theta T(\kappa - i\rho\sigma u)}{\sigma^2} + iuTr + iu\log S_0\right)}{\left(cosh\frac{rT}{2} + \frac{\kappa - i\rho\sigma u}{r} sinh\frac{rT}{2}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}}$$
$$* \exp\left(-\frac{(u^2 + iu)Y_0}{rcosh\frac{rT}{2} + \kappa - i\rho\sigma u}\right)$$